دکتر محرم‌نژاد ایردموسی
عضو هیئت علمی
دانشگاه شهید بهشتی

پای تخته

اشاره

«پای تخته» عنوان بخش ثابتی در «ماهنامهٔ برهان» است که از دو بخش داخلی مسئله‌ها و راه‌حل‌ها تشکیل شده است. در هر شماره از ماه‌نامه، ۱۰ مسئلهٔ جدید مطرح می‌شود که همهٔ خوانندگان را به چالش می‌طلبد. توصیه می‌کنیم که به‌طور فعال به حل آن‌ها بپردازید و راه‌حل‌های خود را برای انعکاس در ماه‌نامه برایمان بفرستید تا با نام خودتان در شماره‌های بعد چاپ شود. از طراحان مسائل ریاضی نیز می‌خواهیم که مسائل جدید خود را برای طرح در بخش مسئله‌ها برایمان بفرستند. توجه داشته باشید که مسائل جدید باید همراه با حل (یا راه‌حل‌های) آن‌ها و در صورت امکان با ذکر مأخذ باشد.

مسائل و راه‌حل‌های خود را می‌توانید یا از طریق پستی (به آدرس ماه‌نامه) و یا از طریق پست الکترونیکی، برایمان بفرستید که طریقهٔ دوم سریع‌تر و بهتر خواهد بود. در صورتی که خواستید از طریق پست الکترونیکی اقدام کنید، صفحات نوشته‌های خود را اسکن (با وضوح حداقل ۱۵۰dpi) و یا تایپ کنید و بفرستید. در پایان هر سال اسامی نفرات برتر در ماه‌نامه درج خواهد شد و به بهترین‌ها جوایز نفیسی اهدا می‌شود.

نکتهٔ آخر اینکه در چند شمارهٔ اول، سهم مسئله‌ها بیشتر است و با دریافت پاسخ‌های شما، بخش راه‌حل‌ها به‌تدریج پربارتر خواهد شد.

منتظر راه‌حل‌های ارسالی شما هستیم.

■ بخش اول: مسئله‌ها

۱۹۱. a عددی است حقیقی به‌طوری که: $a^2+\frac{1}{a^2}=14$. مقدار $a^3+\frac{1}{a^3}$ را به‌دست آورید.

۱۹۲. بزرگ‌ترین توان ۲ را پیدا کنید که عدد $K=75!-71!$ را می‌شمارد.

۱۹۳. a، b و c اعدادی صحیح هستند، به‌طوری که: $1\leq a<b<c$ و $a^2+b^2+c^2=14(a+b+c)$. حاصل a+b+c چه‌قدر است؟

۱۹۴. ریشه‌های معادلهٔ $(x^2-2x+m)(x^2-2x+n)=0$ که در آن $m,n\in R$، یک تصاعد حسابی با جملهٔ اول $\frac{1}{4}$ تشکیل داده‌اند. حاصل $|m-n|$ را به‌دست آورید.

۱۹۵. x و y دو عدد طبیعی هستند، به‌طوری که: $\frac{x}{3}+\frac{y}{4}=\frac{11}{12}$. آن‌ها را بیابید.

۱۹۶. ریشه‌های معادلهٔ $[x^3]+[x^2]+[x]=\{x\}-1$ را به‌دست آورید. ($[x]$ نشان‌دهندهٔ جزءصحیح x و $\{x\}=x-[x]$.)

۱۹۷. با فرض $f(x)=x^2+12x+30$، ریشه‌های معادلهٔ زیر را پیدا کنید.

$$f(f(f(f(f(x)))))=0$$

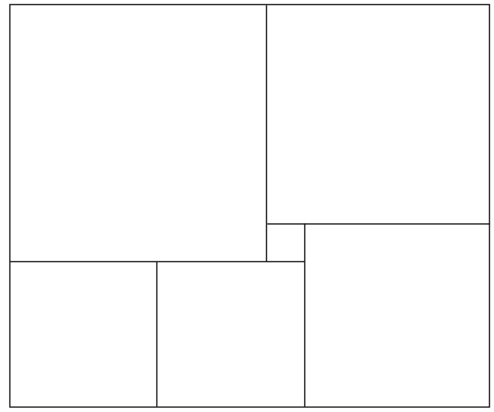
۱۹۸. طول اضلاع یک مثلث قائم‌الزاویه برابر است با: a، $2a+2d$ و $2a+3d$، که a و d دو عدد مثبت هستند. نسبت $\frac{a}{d}$ را بیابید.

۱۹۹. حاصل عبارت زیر را برحسب n به‌دست آورید:

$$A=(1-\frac{1}{4})(1-\frac{1}{9})(1-\frac{1}{16})...(1-\frac{1}{n^2})$$

۲۰۰. در شکل مستطیلی را می‌بینید که با ۶ مربع

پوشانده شده است. اگر ضلع کوچک‌ترین مربع، برابر یک باشد، ضلع بزرگ‌ترین مربع چه‌قدر است؟



■بخش دوم: راه‌حل‌ها

۱۶۱. با فرض $f(x)=\frac{x-1}{x+1}$ و با فرض $f_1(x)=f(x)$، $f_k=f_1 o f_{k-1}$. مطلوب است مقدار $f_{2015}(2015)$.

با محاسبهٔ f_2، f_3 و f_4 داریم:

$$f_2(x)=\frac{-1}{x},\quad f_3(x)=\frac{x+1}{1-x},\quad f_4(x)=x$$

در نتیجه این چهار تابع متناوباً تکرار می‌شوند. پس:

$$f_{2015}(x)=f_3(x)=\frac{x+1}{1-x}$$

و در نهایت: $f_{2015}(2015)=-\frac{2016}{2014}$.

۱۶۲. حاصل عبارت زیر را به‌دست آورید:

$$S=\frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{99}+\sqrt{100}}$$

داریم: $\frac{1}{\sqrt{k}+\sqrt{k+1}}=\sqrt{k+1}-\sqrt{k}$. در نتیجه:

$$S=\sqrt{2}-\sqrt{1}+\sqrt{3}-\sqrt{2}+\ldots+\sqrt{100}-\sqrt{99}$$
$$=\sqrt{100}-\sqrt{1}=10-1=9$$

۱۶۳. N عددی است که در آن هر رقم ۱، ۲، ۳، ۴، ۵، ۶ و ۷ دقیقاً ۳بار به‌کار رفته، اما رقم ۸ در این عدد به‌کار نرفته است. ثابت کنید N مربع کامل نیست.

مجموع ارقام N برابر است با:

$9k+(1+2+\ldots+7)\times 3=84+9k$

در نتیجه N مضرب ۳ است. پس اگر N مربع کامل باشد، باید مضرب ۹ نیز باشد که چنین نیست.

۱۶۴. برای هر عدد طبیعی n، $f(n)$ برابر است با تعداد روش‌های نوشتن n به‌صورت مجموع چند عدد طبیعی. مانند: $n=a_1+a_2+\ldots+a_k$، به‌طوری که: $a_1\le a_2\le\ldots\le a_k\le a_{k+1}$. برای مثال: $f(4)=4$، چون: $1+1+1+1=1+1+2=2+2=4$. اکنون $f(n)$ را برحسب n به‌دست آورید.

ثابت می‌کنیم: $f(n)=n$. برای هر $1\le k\le n$ ثابت می‌شود تنها یک جواب برای معادلهٔ $a_1+a_2+\ldots+a_k=n$ با شرط $1\le a_1\le a_2\le\ldots\le a_k\le a_1+1$ وجود دارد. برای اثبات، فرض کنید: $n=kq+r$ که در آن $0\le r<k$. در این صورت:

$n=r(q+1)+(k-r)q$. در نتیجه:

$$a_1=a_2=\ldots=a_{k-r}=q\ ,\ a_{k-r+1}=\ldots=a_k=q+1$$

از طرف دیگر، اگر: $a_1=a_k$، داریم: $a_1=\frac{n}{k}$ و اگر $a_k=a_1+1$، آن‌گاه:

$$ka_1\le a_1+\ldots+a_k<k(a_1+1)\Rightarrow a_1\le\frac{n}{k}<a_1+1$$
$$\Rightarrow a_1=\left\lfloor\frac{n}{k}\right\rfloor.$$

بنابراین برای هر $1\le k\le n$، دقیقاً یک جواب و در مجموع n جواب وجود دارد.

۱۶۵. آیا توانی از ۲ وجود دارد که چهار رقم سمت راستش برابر ۲۰۱۴ باشد؟

خیر. اگر 2^α چهار رقم سمت راستش ۲۰۱۴ باشد، آن‌گاه: $2^\alpha=10^4k+2014$. با تقسیم دو طرف بر دو داریم: $2^{\alpha-1}=5000k+1007$. طرف اول زوج و طرف دوم فرد است (تناقض).

۱۶۶. جملهٔ ۲۰۱۵-اُم در دنبالهٔ ...,1,2,2,3,3,3,4,4,4,4 را به‌دست آورید.

باید دنبال مقدار n بگردیم، به‌طوری که:

$1+2+\ldots+n\le 2015<1+2+\ldots+n+(n+1)$

که برای n به جواب $n=62$ می‌رسیم. در واقع: $(1+2+\ldots+62)+62=2015$. در نتیجه جملهٔ ۲۰۱۵-ام برابر است با ۶۳.

۱۶۷. ثابت کنید به ازای هر عدد طبیعی فرد n، $1^n+2^n+...+n^n$ بر n^2 بخش‌پذیر است.

با فرض x+y=n خواهیم داشت: $y \overset{n}{\equiv} -x$، در نتیجه:

$$A = x^{n-1} - x^{n-2}y + x^{n-3}y^2 - ... + y^{n-1} \overset{n}{\equiv} nx^{n-1} \overset{n}{\equiv} 0$$

در نتیجه: $n^2 \mid (x+y)A = x^n + y^n$. بنابراین:

$$n^2 \mid 1^n + (n-1)^n + 2^n + (n-2)^2 + ... + (\frac{n-1}{2})^n + (\frac{n+1}{2})^n + n^n$$

۱۶۸. nضلعی منتظمی در صفحه رسم شده است، به‌طوری‌که هیچ‌کدام از اضلاع آن عمودی نیست. اگر m_1، m_2، ... و m_n به ترتیب شیب اضلاع باشند، ثابت کنید:

$$m_1m_2+m_2m_3+...+m_{n-1}m_n+m_nm_1=-n$$

می‌دانیم بین شیب‌های دو خط متقاطع و زاویهٔ بین آن دو، رابطهٔ زیر برقرار است:

$$\tan\alpha = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1m_2}$$

در نتیجه: $m_1m_2 = \frac{m_2 - m_1}{\tan\alpha} - 1$. حال در یک n-ضلعی منتظم تمام زاویه‌ها برابرند. پس:

$$m_1m_2 + m_2m_3 + ... + m_nm_1 = \frac{m_2 - m_1}{\tan\alpha} - 1 + \frac{m_3 - m_2}{\tan\alpha} - 1 + ... + \frac{m_1 - m_n}{\tan\alpha} - 1 = -n$$

۱۶۹. نه خط راست داریم که هر کدام مربع ABCD را به دو چهارضلعی با نسبت مساحت ۲ به ۳ تقسیم کرده‌اند. ثابت کنید سه‌تا از این خطوط از یک نقطه می‌گذرند.

دو قطر مربع را رسم کنید و هر کدام از آن‌ها را به پنج قسمت مساوی تقسیم کنید. دو نقطهٔ وسط از هر قطر را در نظر بگیرید. ثابت می‌شود هر خطی که مربع را به دو چهارضلعی به نسبت ۳ به ۲ تقسیم می‌کند، از یکی از این چهار نقطه می‌گذرد (اثبات به عهدهٔ خودتان). حال چون نه خط راست داریم، طبق اصل لانهٔ کبوتر، حداقل ۳ تا از آن‌ها از یکی از این چهار نقطه می‌گذرند.

۱۷۰. چندجمله‌ای P(x) از درجهٔ حداکثر n، n+1 ریشهٔ متمایز دارد. ثابت کنید: P(x) چندجمله‌ای صفر است (P(x)=0 به ازای هر $x\in R$).

به روش استقرا حکم را ثابت می‌کنیم. اگر چندجمله‌ای P از درجهٔ ۱ باشد و دو ریشه داشته باشد، به وضوح مشخص است که خط راست با شیب صفر یعنی P(x)=0 است. فرض کنید حکم برای n=k برقرار است و چندجمله‌ای P(x) از درجهٔ k+1 را در نظر بگیرید. چون P، k+2 ریشه دارد، پس فرض کنید α یکی از ریشه‌های آن باشد. در نتیجه P(x) بر x-α بخش‌پذیر است و خارج‌قسمت، یک چندجمله‌ای از درجهٔ k خواهد بود که k+1 ریشه دارد. در نتیجه طبق فرض استقرا، چندجمله‌ای خارج‌قسمت، چندجمله‌ای ثابت صفر خواهد بود. در نتیجه P(x) نیز چندجمله‌ای ثابت صفر است.

۲ پرسش‌های پیکارجو!

محیط مثلثی با اضلاع به طول اعداد طبیعی، که در دایره‌ای به قطر ۶/۲۵ واحد محاط می‌شود، چه‌قدر است؟

الف) ۱۴ ب) ۱۶ ج) ۱۸

د) ۱۹ هـ) ۲۰

۵. آقا و خانمی وارد فروشگاهی می‌شوند. آقا ۲۰/۰۰۰ تومان برای خرید چیزی می‌پردازد که ارزش آن ۱۰/۰۰۰ تومان است و به آن نیاز دارد. خانم ۱۰/۰۰۰ تومان برای خرید چیزی می‌پردازد که ارزش آن ۲۰/۰۰۰ تومان است و به آن نیاز ندارد! سود (زیان) هر یک چه‌قدر است؟!

تفریح اندیشه!